***Faktor Exacta* Vol. 5 No. 4: 283-295**
***ISSN:* 1979 276X**

RUANG METRIK DENGAN SIFAT BOLA TERTUTUPNYA KOMPAK

RAHMAWATI YULIYANI
rahmawatiyuliyani @yahoo.co.id
08561299991
Program studi Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Matematika, dan IPA
Universitas Indraprasta

Abstrak. Ruang metrik dikatakan mempunyai sifat bola tertutupnya kompak jika setiap bola tertutup di dalamnya merupakan himpunan kompak. Dalam tulisan ini akan dibahas dan dipelajari ruang metrik yang demikian, khususnya masalah kekompakan, kelengkapan dan separabel. Disamping itu juga akan dibahas fungsi jarak himpunan terhadap titik dan himpunan dengan hinpunan di dalam ruang metrik yang mempunyai sifat bola tertutupnya kekompakan.

Kata kunci**:** Kekompakan, kelengkapan dan separabel

Abstract. Metric spaces is said to have the properties of a compact closed ball (CCB) if every closed ball in it is a compact set. In this paper will be discussed and studied in such a metric spaces, especially the compactness, completeness and separable. Besides that it also covered the set distance function to point and the set to the other set in metric spaces that have a compact closed ball.

Keywords**:** compactness, completeness and separable **.**

PENDAHULUAN

Perkembangan ilmu matematika banyak dimanfaatkan oleh para ilmuwan untuk keperluan pengembangan disiplin ilmunya. Pemanfaatan matematika tidak terbatas pada kalangan matematikawan saja akan tetapi meliputi para ahli di luar bidang matematika, khususnya para ahli rekayasa maupun para ahli di bidang analisis. Cabang matematika teoritis yang cukup penting adalah bidang analisis, dan salah satu pendekatan mengenai pembahasan analisis ini adalah menggunakan metrik. Pendekatan metrik untuk analisis termasuk yang paling tua dalam matematika murni dan sangatlah menarik untuk dibahas lebih mendalam.

Di dalam suatu ruang metrik sebarang cukup dikenal bahwa setiap himpunan bagian yang kompak adalah tertutup dan terbatas, akan tetapi untuk kondisi sebaliknya belum tentu berlaku. Oleh karena itu perlu dicari suatu ruang metrik yang memenuhi pernyataan di atas sehingga untuk kondisi sebaliknya juga berlaku, yaitu setiap himpunan yang tertutup dan terbatas adalah kompak. Dalam hal ini ternyata ada ruang metrik yang demikian yaitu ruang metrik dengan sifat setiap bola tertutup di dalamnya merupakan himpunan kompak. Ruang metrik yang demikian oleh Aubin (1977, hal 258) diberi nama ruang bersifat Compact Closed Balls (CCB) dan selanjutnya akan disingkat dengan ruang bersifat CCB. Dan salah satu contoh ruang yang bersifat CCB ini adalah ruang Euclides R^n, dengan $n \in \mathbb{N}$.

Melalui ruang metrik yang bersifat CCB ini akan dipelajari dan dibahas lebih lanjut mengenai sifat-sifat apa saja yang bisa diturunkan dari ruang metrik ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Metrik dan Ruang Metrik

Misalkan X menyatakan sebuah himpunan dan $d: X \times X \rightarrow R^{+}$ sebuah fungsi dari $X \times X$ ke himpunan bilangan real bukan negatif R^{+} yang memenuhi sifat-sifat berikut ini. Untuk semua x, y dan z dalam X

(i) $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$
(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Selanjutnya d disebut metrik atau jarak pada pada X, dan $d(x,y)$ disebut jarak dari x ke y. Himpunan X yang dilengkapi dengan metrik d disebut *ruang metrik*, dinyatakan (X,d). (Kusrini, Susiswo, 2005)

Sekitar dan Titik Limit

Definisi 1. Diberikan ruang metrik (X,d). Jika p sebarang titik di dalam ruang metrik X, dan bilangan $r > 0$, maka himpunan $N_r(p) = \{x \in X \mid d(p,x) < r\}$ dinamakan daerah *sekitar* (*Neighbourhood*) titik p dengan radius r. Titik p dinamakan pusat sekitar $N_r(p)$. (Soemantri,1993)

Secara umum sekitar dalam ruang metrik X adalah himpunan $B_r°(p) = \{x \in X \mid d(p,x) < r\}$ yang disebut *"bola terbuka"* yang berpusat di p dengan radius $r>0$. Sedangkan $B_r(p) = \{x \in X \mid d(p,x) \leq r\}$ disebut *"bola tertutup"* dengan pusat di p dan radius $r > 0$. (Aubin,1977)

Definisi 2. Diberikan (X,d) ruang metrik dan $E \subset X$. Titik $p \in X$ disebut *titik limit* dari E jika setiap sekitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \neq p$ dan $q \in E$ atau

$$p = \text{titik limit} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \left(N_\varepsilon(p) \setminus \{p\}\right) \cap E \neq \emptyset \text{ (Soemantri,1993)}$$

Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Definisi 3. Diberikan ruang metrik X. Semua titik dan himpunan yang disebut dalam definisi berikut adalah titik didalam X dan subset dari X.

1. Titik p disebut suatu titik interior himpunan E jika terdapat suatu sekitar dari p yang merupakan subset dari E atau (p titik interior E) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ r> 0)($N_r(p) \subset E$)
2. Himpunan E disebut himpunan terbuka jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan E atau (E himpunan terbuka) $\Leftrightarrow$ (p$\in$ E $\Rightarrow$ p titik interior E)
3. Himpunan E disebut himpunan tertutup jika semua titik limitnya.termuat di dalam E atau (E himpunan tertutup) $\Leftrightarrow$ (p titik limit E $\Rightarrow$ p $\in$ E)
   Himpunan semua titik limit himpunan E diberikan notasi E'.
   Jadi E tertutup $\Leftrightarrow E' \subset E$. (Soemantri,1993)

Teorema 4. Di dalam sebarang ruang metrik berlaku: E terbuka $\Leftrightarrow E^c$ tertutup.

Bukti:($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika E terbuka maka E^c tertutup.

Diketahui E terbuka. Diambil p titik limit E^c, maka untuk setiap sekitar $N_r(p)$ berlaku $(N_r(p) \setminus \{p\}) \cap E^c \neq \emptyset$ berarti untuk setiap r>0 maka sekitar $N_r(p) \not\subset E$. Karena E terbuka dan $N_r(p) \not\subset E$, $\forall$r > 0 maka $p \notin E$, jadi $p \in E^c$ dengan kata lain E^c tertutup.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika E^c tertutup maka E terbuka.

Diketahui E^c tertutup. Diambil sembarang titik $x \in E$, berarti $x \notin E^c$. Jika $x \notin E^c$ dan E^c tertutup maka x bukan titik limit E^c. Jadi terdapat r>0 sedemikian hingga $N_r(x) \cap E^c = \emptyset$ atau $N_r(x) \subset E$. Dengan kata lain x adalah titik interior E. Terbukti E terbuka.

Teorema 5. Diberikan sembarang himpunan A (berhingga atau tak berhingga). Untuk keluarga himpunan-himpunan terbuka $\{ G_a : a \in A\}$ maka $\cup_{a \in A} G_a$ juga terbuka.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa sembarang titik $x \in S = \cup_{a \in A} G_a$ adalah titik interior S.

Diambil sembarang titik $x \in S$, tentulah ada $a \in A$ sehingga $x \in G_a$. Karena G_a terbuka maka ada sekitar $N_r(x)$ yang subset G_a dan tentulah juga subset S. Sehingga didapat untuk sembarang titik $x \in S$ maka $N_r(x) \subset S$ atau x titik interior S, dengan kata lain S terbuka.

Teorema 6. Dalam sembarang ruang metrik, setiap sekitar adalah himpunan terbuka.

Bukti: Diberikan sembarang ruang metrik (X,d), p sembarang titik di dalam X, dan $N_r(p)$ suatu sekitar dari p. Ambil $q \in N_r(p)$ maka $d(p,q) < r$. Dimisalkan $d(p,q) = h < r$ dan ambil $t = r\text{-}h > 0$. Dibuat sekitar $N_r(q)$, jika $x \in N_r(q)$ maka $d(q,x) < t$ sehingga menurut ketaksamaan segitiga berlaku $d(p,x) \le d(p,q) + d(q,x) < h + (r\text{-}h) = r$ berarti $x \in N_r(p)$. Jadi $N_r(q) \subset N_r(p)$ atau q titik interior $N_r(p)$,terbukti untuk setiap $q \in N_r(p)$ maka q adalah titik interior $N_r(p)$ dengan kata lain $N_r(p)$ terbuka.

Definisi 7. Diberikan sub-ruang (Y,d) dari ruang metrik (X,d) dan $E \subset Y$ maka himpunan E disebut terbuka relatif terhadap Y jika untuk setiap titik yang diberikan p anggota E, dapat dicari $r>0$, sehingga untuk semua $y \in Y$ dengan $d(p,y)<r$ maka $y \in E$. (Soemantri, 1993)

Teorema 8. Jika Y sub-ruang dari X dan E subset Y, maka E terbuka relatif terhadap Y, jika dan hanya jika terdapat suatu himpunan G yang terbuka terhadap X dan $E = G \cap Y$.

Bukti:($\Rightarrow$) Jika E terbuka relatif terhadap Y maka untuk setiap $p \in E$ ada $r>0$ sehingga untuk semua $y \in Y$ dengan $d(p,y)<r$ maka $y \in Y$. Kemudian untuk setiap $p \in E$ dibentuk sekitar $N_r(p) = \{x \in X\text{: } d(p,x)<r\}$, dan $G = \cup_{p \in E} N_r(p)$. Menurut teorema 5 dan 6 maka himpunan G terbuka terhadap X. Jelas bahwa $E \subset G \cap Y$. Jika diambil $y \in G \cap Y$ maka terdapatlah suatu $p \in E$ dan $y \in N_r(p)$, jadi $d(p,y)<$r yang berarti $y \in E$. Karena $E \subset G \cap Y$ dan $G \cap Y \subset E$ maka $E = G \cap Y$

($\Leftarrow$) Diandaikan terdapat himpunan G yang terbuka terhadap X dan $E = G \cap Y$. Jika diambil $p \in E$, maka jelas bahwa $p \in G$. Karena G terbuka terhadap X, maka terdapat $r>0$ sehingga untuk semua $x \in X$ dengan $d(p,x)<r$ berakibat titik $x \in G$. Karena $Y \subset X$, maka semua $y \in Y$ dengan $d(p,y)<r$ berlaku $y \in G \cap Y = E$. Jadi untuk setiap titik $p \in E$ terdapat $r>0$ sehingga $y \in E$ untuk semua $y \in Y$ dan $d(p,y)<r$. Terbukti E terbuka relatif terhadap Y.

Himpunan Terbatas

Himpunan E dalam ruang metrik X disebut *terbatas* jika terdapat titik $p \in X$ dan bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ maka jarak $d(p,x) \le M$. (Soemantri,1993)

Barisan Titik di dalam Ruang Metrik

Diberikan (X,d) ruang metrik. Barisan titik di dalam X adalah suatu fungsi dari $\mathbb{N}$ ke dalam X, ditulis $f(n)=x_n$ dan dinotasikan dengan $\langle x_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\forall \varepsilon>0 \exists N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \ge N$ berlaku $d(x_n, x\} < \varepsilon$ dan ditulis $\lim_{n\to\infty} x_{n=} x$ dan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ maka $\langle x_{nk} \rangle$ disebut sub barisan dari $\langle x_n \rangle$. (Soemantri, 1993)

Barisan $\langle x_n \rangle$ disebut barisan Cauchy jika $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \ge N$ berlaku $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang metrik ini konvergen maka ruang metrik ini disebut *ruang metrik lengkap.*(Soemantri, 1993)

Teorema 9. Di dalam sebarang ruang metrik, setiap barisan Cauchy adalah terbatas.

Bukti: Dimisalkan $\varepsilon = 1$ maka untuk sembarang barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ terdapat bilangan bulat positif N sehingga untuk semua $m, n \ge$ N berlaku $d(x_m, x_n) < 1$. Diambil $m = N$ maka $d(x_N, x_n) < 1$ untuk semua $n \ge N$. Sekarang kita ambil $M = maks\ \{d(x_N, x_1), d(x_N, x_2), \ldots\ldots, d(x_N, x_{N\text{-}1}), 1\}$. Dengan demikian diperoleh hasil bahwa $d(x_N, x_n) \le M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi terbukti $\langle x_n \rangle$ terbatas.

Penutup Himpunan

Definisi 10. Jika X suatu ruang metrik dan E' menyatakan himpunan semua titik limit himpunan E, maka *penutup himpunan (closure set) E* dinotasikan dengan $\bar{E}$ adalah himpunan $\bar{E} = E \cup E'$(Soemantri, 1993)

Teorema 11. Jika (X,d) sebarang ruang metrik dan $E \subset X$, maka:
(i) $\bar{E}$ tertutup
(ii) E tertutup $\Leftrightarrow$ $\bar{E}$ =E

Bukti: (i) Untuk membuktikan bahwa $\bar{E}$ tertutup, maka harus diperlihatkan bahwa $(\bar{E})^c$ terbuka. Diambil $x \notin \bar{E}$. Karena $\bar{E} = E \cup E'$ dan $x \notin \bar{E}$ berarti $x \notin E$ dan $x \notin E'$. Artinya ada $N_r(x)$ sekitar dari x, sehingga $N_r(x) \cap E = \emptyset$. Kemudian di dalam $N_r(x)$ tentu tidak ada titik limit E maka $N_r(x) \cap \bar{E} = \emptyset$ sehingga $N_r(x) \subset (\bar{E})^c$, berarti $(\bar{E})^c$ terbuka. Berdasarkan teorema 4 maka $\bar{E}$ tertutup.
(ii) ($\Rightarrow$) Jika E tertutup maka akan dibuktikan bahwa $\bar{E} = E$
Diketahui E tertutup maka $E' \subset E$ berarti $\bar{E} = E \cup E' = E$. Jadi $\bar{E} = E$
($\Leftarrow$) Jika $\bar{E} = E$ maka akan dibuktikan bahwa E tertutup.
Menurut (i) $\bar{E}$ tertutup dan $\bar{E} = E$ berarti E tertutup.

Definisi 12. Diberikan X ruang metrik dan $E \subset X$. Himpunan E dikatakan rapat (dense) dalam X jika memenuhi salah satu pernyataan dibawah ini:
(i) $\bar{E} = X$
(ii) untuk setiap $p \in X$ terdapat barisan $\langle x_n \rangle$ didalam E yang konvergen ke p.
(Soemantri, 1993)

Definisi 13. X disebut separabel jika ada himpunan terbilang D yang dense (rapat) dalam X. (Aubin,1977)

Himpunan Kompak

Definisi 14. Diberikan ruang metrik X dan $E \subset X$. Keluarga semua himpunan terbuka $\{G_{:} A\}$, A himpunan indeks. G disebut *selimut terbuka (open cover)* untuk E jika untuk setiap $x \in E$, terdapat $\alpha \in A$ sehingga $x \in G_\alpha$ dan memenuhi $E \subset \cup G_\alpha$. Misal $\mathcal{G} = \{G: \alpha \in A\}$ selimut terbuka untuk E, jika $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ dengan $\mathcal{G}_0$ masih mampu menyelimuti E maka $\mathcal{G}_0$ disebut *sub selimut terbuka* untuk E.
(Soemantri,1993)

Definisi 15. Diberikan (X,d) ruang metrik dan $K \subset X$. K disebut *himpunan kompak* jika memenuhi salah satu syarat berikut:
(i) Setiap selimut terbuka untuk K memuat subselimut berhingga yang masih menyelimuti K. (Soemantri,1993)
(ii) Setiap barisan tak hingga $\langle x_n \rangle$ dengan $x_n \in K$ mempunyai setidaknya satu titik limit yang termuat di dalam K. (Aubin, 1977)

Teorema 16. Jika $K \subset Y$ dan Y sub ruang ruang metrik X, maka K kompak relatif terhadap Y jika dan hanya jika K kompak relatif terhadap X.

Bukti: ($\Rightarrow$) Jika K kompak relatif terhadap Y dan $\{G_\alpha\}$ sembarang selimut terbuka untuk K terhadap X maka keluarga $\{V_\alpha\}$ dengan $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$ merupakan selimut terbuka untuk K terhadap Y. Maka terdapat $V_{\alpha 1}, V_{\alpha 2}, ..., V_{\alpha n}$, yang menyelimuti K, sebab K kompak relatif terhadap Y. Dengan demikian keluarga berhingga $G_{\alpha 1}, G_{\alpha 2}, ..., G_{\alpha n}$, merupakan sub selimut berhingga dari $\{G_\alpha\}$ yang menyelimuti K. Jadi K kompak relatif terhadap X.
($\Leftarrow$) Jika K kompak relatif terhadap X dan $\{V_\alpha\}$ keluarga himpunan terbuka relatif terhadap Y dan yang menyelimuti K. Menurut teorema 8 maka $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$ dengan G_α himpunan terbuka terhadap X. Dengan demikian $\{G_\alpha\}$ merupakan selimut terbuka untuk

K terhadap X. Karena K kompak relatif terhadap X, maka $\{G_\alpha\}$ memuat sub-selimut berhingga yang menyelimuti K. Himpunan-himpunan V_α yang terkait dengan himpunan G_α anggota sub-selimut tadi, merupakan sub-selimut berhingga dari $\{V_\alpha\}$ yang menyelimuti K. Jadi K kompak terhadap Y. (Soemantri,1993)

Definisi 17. Ruang metrik X disebut *kompak lokal* jika untuk setiap titik $x\in X$ ada sekitar $N_r(x)$ yang closurenya $\overline{Nr(x)}$ kompak. *(Royden, 1989)*

Teorema 18. Diberikan (X,d) ruang metrik sembarang dan $K\subset X$. Jika K kompak maka K tertutup dan terbatas.

Bukti: (a) Untuk membuktikan bahwa K tertutup maka cukup ditunjukkan bahwa K^c terbuka. Diambil $p\in K^c$, kemudian untuk setiap titik $x\in K$ dibuat sekitar V_x dengan pusat x dan sekitar W_x dengan pusat p yang radiusnya kurang dari $\frac{1}{2}d(p,x)$. Jadi $V_s \cap W_x = \emptyset$ untuk semua $x\in K$. Jelas bahwa keluarga (V_x: $x\in K$) adalah selimut terbuka untuk K. Karena K kompak maka dapat ditentukan $x_1, x_2,........, x_n$ anggota K sehingga

$$K\subset V_{x1}\cup V_{x2}\cup .... \cup V_{xn} = V$$

Perhatikan himpunan $W=W_{x1}\cap W_{x2}\cap ....\cap W_{xn}$. Himpunan W merupakan suatu sekitar titik p dan himpunan bagian semua W_{xi} untuk i = 1,2,3,.............,n. Jadi $W\cap V_{xi} = \emptyset$ untuk semua i = 1,2,.........,n sehingga $W\cap V = \emptyset$. Dengan demikian $W\cap K = \emptyset$ atau $W\subset K^c$. Terbukti p titik interior K^c sehingga K^c terbuka. Berdasarkan teorema 4 maka K tertutup.

(b) Akan dibuktikan bahwa K terbatas.

Untuk setiap $x\in K$ dibentuk sekitar N_1 (x) dengan pusat x dan radius 1. Keluarga $\{ N_1(x)$: $x\in K \}$ merupakan selimut terbuka untuk K. Karena K kompak maka terdapat $x_1,x_2,x_3,...,x_m \in K$ sehingga $K\subset N_1(x_1)\cup N_1(x_2)\cup....\cup N_1(x_m)$. Dipilih $p\in X$, $p =x_1$ sebagai titik tetap. Dimisalkan M-1 = maks $\{d(p,x_2), d(p,x_3),......., d(p,x_m)\}$. Untuk sembarang $y\in K$ terdapat $x_j \in K$ dengan $1\le j\le m$ sehingga $y\in N_1(x_j)$. Berarti $d(y,x_j) <1$. Dengan ketaksamaan segitiga didapat:

$$\begin{aligned} d(p,y) &\le d(p,x_j) + d(x_j, y) \\ &\le (M-1) + 1 \\ &\le M \qquad \forall y\in K \end{aligned}$$

Jadi terbukti K terbatas.

Teorema diatas telah membuktikan bahwa jika K kompak dalam ruang metrik sebarang maka K merupakan himpunan yang tertutup dan terbatas. Tetapi untuk kondisi sebaliknya belum tentu berlaku, seperti contoh dibawah ini:

Contoh: Diberikan ruang metrik $\mathbb{Q}$ dengan jarak biasa, maka himpunan A = $\{x\in\mathbb{Q}: 2 < x^2 < 3\}$ dan $A \subset\mathbb{Q}$ adalah tertutup dan terbatas tetapi tidak kompak.

Dengan menggunakan teorema berikut ini akan didapatkan bahwa dalam ruang Euclides R^n untuk sebarang n bilangan bulat positif, himpunan tertutup dan terbatas adalah kompak.

Teorema 19. Jika $\langle I_n\rangle$ barisan selang-selang tertutup dalam $\mathbb{R}$, sedemikian hingga $I_n \supset I_{n+1}$ (n=1,2,3,.....), maka $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong.

Bukti: Dimisalkan $I_n =[a_n ,b_n]$ dan $E = \{ a_n: n\in\mathbb{N}\}$. Maka E tidak kosong dan terbatas ke atas, untuk semua n bilangan $a_n \le b_1$. Karena $\mathbb{R}$ mempunyai sifat batas atas terkecil maka terdapatlah x didalam $\mathbb{R}$ sehingga x = sup E . Mengingat $I_n \supset I_{n+1}$ untuk semua n , maka untuk sebarang *p dan q bulat positif berlaku*

$$a_p \le a_{p+q} \le b_{p+q} \le b_q$$

Jadi untuk sebarang $p \in \mathbb{N}$ dan sebarang $q \in \mathbb{N}$ berlaku $a_p \leq b_p$, sehingga b_q merupakan batas atas untuk E. Dengan demikian maka sup $E = x \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi untuk semua n berlaku $a_n \leq x \leq b_n$, sehingga $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Terbukti bahwa $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong. (Soemantri, 1993)

Teorema 20. Di dalam $\mathbb{R}$ selang tertutup adalah kompak.
Bukti: Diberikan selang tertutup $I = \{x\colon a \leq x \leq b\}$. Diandaikan bahwa I tidak kompak. Jadi terdapat suatu selimut terbuka $\{G_\alpha\}$ tanpa sub - selimut berhingga yang dapat menyelimuti I. Oleh titik c = $\frac{1}{2}(a+b)$ selang ini terbagi menjadi dua sub-selang $[a,c]$ dan $[c,b]$. Karena $\{G_\alpha\}$ tidak memuat sub-selimut berhingga $[a,b]$ maka paling sedikit satu dari kedua selang ini tidak dapat diselimuti oleh sub-keluarga berhingga dari $\{G_\alpha\}$. Misalkan $I_1 = [a_1, b_1]$ adalah sub-selang yang tidak dapat diselimuti oleh sub-keluarga berhingga dari $\{G_\alpha\}$. Kemudian I_1 ini dibagi lagi menjadi dua sub-selang $[a_1,c_1]$ dan $[c_1,b_1]$ oleh titik $c_1 = \frac{1}{2}(a_1+b_1)$. Salah satu dari kedua selang ini tentu tidak dapat diselimuti oleh sub-keluarga berhingga dari G_α. Demikian proses ini dikerjakan terus-menerus sehingga diperoleh barisan selang tertutup $\langle I_n \rangle$ dengan sifat:
(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ....$;
(b) I_n tidak dapat diselimuti oleh sub-keluarga berhingga dari $\{G_\alpha\}$;
(c) Jika x dan y di dalam I_n maka $|x\text{-}y| \leq \frac{b-a}{2^n}$
Mengingat (a) dan teorema 19 terdapatlah suatu titik p sehingga $p \in \cap_n I_n$. Karena $p \in [a,b]$ maka terdapatlah suatu α sehingga $p \in G_\alpha$. Karena G_α terbuka maka terdapatlah $r >$ 0 sehingga selang terbuka $(p\text{-}r,\ p\text{+}r) \subset$ G. Dipilih bilangan asli n yang cukup besar sehingga $\frac{b-a}{2^n} < r$. Menurut (c) ini berarti bahwa $I_n \subset G$, sebab $I_n \subset (p\text{-}r,\ p\text{+}r) \subset G$. Tetapi jika demikian berarti bahwa I_n dapat diselimuti oleh satu saja himpunan terbuka anggota $\{G_\alpha\}$. Terdapat kontradiksi dengan (b). Jadi pengandaian di atas salah, dan $[a,b]$ harus kompak. (Soemantri, 1993)

Teorema 21. Jika $\langle I_n \rangle$ barisan sel-n di dalam $\mathbb{R}^n$ sedemikian hingga $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ....$, maka $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong.
Bukti: Dimisalkan $I_n = \{\underline{x} = (x_1,x_2,.....,x_n)\colon a_{nj} \leq x_j \leq b_{nj}\ ,\ 1 \leq j \leq n\}$. Jadi untuk j tertentu ($a \leq j \leq n$) kita mempunyai barisan selang tertutup $\langle I_{nj} \rangle$ dengan $I_{nj} = \{x\colon a_{nj} \leq x_j \leq b_{nj}\}$, n = 1,2,3,..... menurut teorema 19, $\cap_n I_{nj}$ tidak kosong, jadi terdapatlah x_j^* sehingga $a_{nj} \leq x_j^* \leq b_{nj}$ untuk semua n = 1,2,3,..... karena ini berlaku juga untuk semua j = 1,2,3,.....,n, maka akan diperoleh $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots \dots, x_n^*)$ sehingga $\underline{x}^* \in \cap_n I_n$ tidak kosong.

Teorema 22. Untuk n bulat positif, di dalam $\mathbb{R}^n$ sel-n adalah kompak.
Bukti: Dimisalkan I adalah suatu sel-n yang merupakan himpunan $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dengan $a_j \leq x_j \leq b_j$. Jika h = $\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(b_j - a_j\right)^2}$ maka untuk semua $\underline{x}$ dan $\underline{z}$ di dalam I berlaku $|\underline{x} - \underline{z}| \leq h$. Diandaikan I tidak kompak, maka terdapat suatu selimut terbuka $\{G_a\}$ untuk I yang tidak memuat sub-selimut berhingga untuk I. Diambil bilangan real $C_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j)$, j = 1,2, …,n. Maka terbentuklah n selang tertutup $[a_j, c_j]$ dan n selang tertutup $[c_j, b_j]$, j = 1,2…,n. Selang-selang ini membentuk 2^n sel-n sebut V_i ($1 \leq i \leq 2^n$) yang gabungannya sama dengan I. Paling sedikit satu himpunan V_i tidak dapat diselimuti oleh sub-keluarga berhingga dari $\{G_a\}$, himpunan V_i ini disebut I_1. Demikian proses ini kita kerjakan terus-

menerus seperti pada bukti teorema 7.7, diperoleh dibarisan $\langle I_n \rangle$ dari sel-sel - k dengan sifat sebagai berikut:
(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset$ ……;
(b) I_1 tidak dapat diselimuti oleh sub-keluarga berhingga dari $\{G_a\}$;
(c) Jika $\underline{x}$ dan $\underline{z}$ di dalam I_n maka $|\ \underline{x} - \underline{z}\ | < 2^{-n} h$.
Selanjutnya dengan memperhatikan teorema 8.7 dan (a) terdapatlah suatu titik p sehingga $p \in \bigcap_n I_n$. Karena $p \in [a_j, b_j]$ maka terdapatlah suatu α sehingga $p \in G_a$. Karena G_a terbuka maka terdapatlah $r > 0$ sehingga selang terbuka $(p\text{-}r,\ p + r) \subset G$. Dipilih bilangan asli n yang cukup besar sehingga $2^{-n} h < r$. Menurut (c) ini berarti bahwa $I_n \subset G$, sebab $I_n \subset (p\text{-}r,\ p + r) \subset G$. Tetapi jika demikian berarti bahwa I_n dapat diselimuti oleh satu saja himpunan terbuka anggota $\{G_a\}$. Terdapat kontradiksi dengan (b). Jadi pengandaian diatas salah, dan $[a_j, b_j]$ harus kompak. (Soemantri, 1993)

Teorema 23. Setiap himpunan bagian tertutup dari ruang metrik yang kompak adalah kompak.

Bukti: Diberikan himpunan kompak K dan F sub himpunan tertutup dari K. Diandaikan $\{G_\alpha\}$ suatu selimut terbuka untuk F. Karena F tertutup maka F^c terbuka. Perhatikan keluarga $\{G_\alpha\} \cup \{F^c\}$. Keluarga ini menjadi selimut terbuka untuk K , sebab himpunan bagian K yang belum terselimuti oleh $\{G_\alpha\}$ sekarang diselimuti oleh F^c. Karena K kompak maka selimut ini memuat sub selimut yang berhingga dengan F^c suatu anggota dalam sub selimut ini. Dimisalkan sub selimut berhingga ini $\{G_{\alpha 1}, G_{\alpha 2}, \ldots\ldots\ldots.. G_{\alpha n}, F^c\}$. Tentu saja $G_{\alpha 1}, G_{\alpha 2}, \ldots\ldots\ldots.. G_{\alpha n}$ menyelimuti F dan merupakan sub selimut berhingga selimut yang diberikan untuk F. Jadi jika $\{G_\alpha\}$ suatu selimut terbuka untuk F maka $\{G_\alpha\}$ memuat sub selimut berhingga untuk F, sehingga F kompak.

Teorema 24. Jika $\langle x_n \rangle$ suatu barisan di dalam ruang metrik X yang kompak maka $\langle x_n \rangle$ memuat sub barisan yang konvergen ke suatu titik di dalam X.

Bukti: (a) Jika $\langle x_n \rangle$ barisan yang berhingga di dalam X . Karena x_n merupakan fungsi dengan domain himpunan tak berhingga $\mathbb{N}$ maka paling sedikit ada satu elemen $x \in \langle x_n \rangle$ sehingga $x = x_n$ untuk tak berhingga banyak indeks n, dengan demikian kita dapat membentuk suatu barisan $(n_k: k \in \mathbb{N})$ sehingga $n_1 < n_2 < n_3 <$ ….. dan $x_{n1} = x_{n2} = x_{n3} = \ldots = x$. Jadi yang kita peroleh ini merupakan suatu sub barisan yang konvergen ke $x \in X$.

(b) Jika $\langle x_n \rangle$ barisan tak berhingga di dalam X. Karena $\langle x_n \rangle$ sub himpunan ruang metrik X kompak, maka $\langle x_n \rangle$ mempunyai titik limit p di dalam X. Dibentuk suatu barisan didalam $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke p.

Pilih n_1 sehingga $d(x_{n1}, p) < 1$
Pilih n_2 sehingga $d(x_{n2}, p) < ½$
: :
: :
Pilih n_k sehingga $d(x_{nk}, p) < {}^1/_k$ dengan $n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_k$

Terbentuklah sub barisan $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke p untuk $k \to \infty$. Sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, dapat dicari N bilangan bulat positif sehingga untuk semua $k \geq p$ berlaku ${}^1/_k < \varepsilon$. Jadi $d(x_{n1}, p) < {}^1/_k < \varepsilon$ untuk semua $k \geq N$ berlaku ${}^1/_k < \varepsilon$ dan dengan demikian

$$\lim_{k \to \infty} x_{nk} = p$$

Teorema 25. Jika X kompak dan $\langle x_n \rangle$ barisan cauchy di dalam X, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen ke suatu titik didalam X.

Bukti: Menurut teorema sebelumnya (teorema 24), karena $\langle x_n \rangle$ suatu barisan di dalam ruang metrik X yang kompak maka $\langle x_n \rangle$ memuat suatu sub barisan $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke suatu titik $x \in X$. Karena suatu barisan konvergen ke suatu titik jika dan hanya jika semua sub barisannya juga konvergen ke titik tersebut, maka tinggal dibuktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x. Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Karena $\langle x_n \rangle$ konvergen ke $x \in X$, maka terdapat suatu $N_1 \in \mathbb{N}$, sehingga $d(x,x_{nk}) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $k \geq N_1$. Karena $\langle x_n \rangle$ suatu barisan cauchy, maka terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$, sehingga $d(x_m\,, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n, m \geq N_2$. Dipilih N = maks $\{N_1, N_2\}$, maka untuk setiap $N \geq N_1$ dan $n_N = m \geq N \geq N_2$ berlaku $d(x,x_{nN}) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(x_n\,, x_{nN}) < \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku:

$$\begin{aligned} d(x_n\,,x) &\leq d(x_n\,,x_{nN}) + d(x_{nN}\,, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\langle x_n \rangle$ konvergen ke $x \in X$.

Fungsi kontinu

Definisi 26. Diberikan ruang metrik (X, d_1) dan (Y, d_2). $E \subset X$, $p \in E$ dan f fungsi dari E ke Y. Fungsi f dikatakan *kontinu di titik p* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga untuk semua $x \in E$ dan $d_1(x, p) < \delta$ berlaku $d_2(f(x). f(p)) < \varepsilon$, asalkan f terdefinisi di titik p. Jika f kontinu disetiap titik anggota E, maka dikatakan bahwa f kontinu pada E. (Soemantri, 1993)

Definisi 27. Diberikan fungsi f dari ruang metrik (X,d_1) ke dalam (Y, d_2). Fungsi f dikatakan *kontinu seragam* pada X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga untuk semua p dan q di dalam X dengan $d_1(p\,,\,q) < \delta$ berlaku $d_2(f(p)\,,\,f(q)) < \varepsilon$. (Soemantri, 1993)

Jarak Himpunan

Definisi 28. Diberikan (X,d) ruang metrik dengan $A,B \subset X$.

(i) Jarak titik $x \in X$ ke himpunan A didefinisikan:

$$d(x,A) = d(\{x\}, A) = Inf_{y \in A}\, d(x,y)$$

(ii) Jarak dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan:

$$d(A,B) = Inf_{x \in A}\, Inf_{y \in B}\, d(x,y)$$

(Aubin,1977)

Lemma 29. Diberikan ruang metrik (X,d) dan A tidak kosong, $A \subset X$. Maka pemetaan fungsi jarak $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $f(x) = d(x,A)$ untuk setiap $x \in X$ merupakan fungsi yang kontinu seragam pada X.

Bukti: Diambil $z \in A$ untuk setiap $x,y \in X$, maka dengan ketaksamaan segitiga berlaku $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ dan $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$

sedangkan $d(x, A) = inf\,\{d(x,z)\,;\, z \in A$

$\leq inf\ \{\ d(x,y) + d(y,z) \colon z \in A\}$
$= d(x,y) + inf\ \{d(y,z); z \in A\}$
$= d(x,y) + d(y,A)$

Berarti $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$ *atau* $f(x) - f(y) \leq d(x,y)$ ....(1)

Sebaliknya $d(y, A) = inf\ \{d(y,z)\ ;\ z \in A$
$\leq inf\ \{\ d(y,x) + d(y,z) \colon z \in A\}$
$= d(y,x) + inf\ \{d(x,z); z \in A\}$
$= d(y,x) + d(x,A)$

Berarti $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$ *atau* $f(y) - f(x) \leq d(x,y)$ ....(2)

Dari (1) dan (2) didapat $|f(x)-f(y)| \leq d(x,y) < \delta$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ maka
$|f(x)-f(y)|\ ) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
Sehingga terbukti fungsi jarak adalah kontinu seragam pada X.

Ruang Bernorma

X ruang vektor bernilai real, norma pada X adalah pemetaan $x \rightarrow \|x\|,\ \forall x \in X$
Pada $\mathbb{R}$ sedemikian hingga:

i. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in X$
iii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$, $\forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

pasangan $(X, \|\bullet\|)$ disebut ruang bernorma. (Aubin, 1977)

Preposisi 30. Norma mempunyai sifat:

i. $\|-x\| = \|x\|$
ii. $\big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \leq \|x - y\|$

Bukti:

i. $\|-x\| = \|(-1)\ (x)\| = |-1|\ \|x\| = \|x\|$
ii. $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$
$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ ....(1)
Karena $\|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\ \|x - y\| = \|x - y\|$ maka
$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$
$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$ ....(2)

Dari (1) dan (2) didapat $\big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \leq \|x - y\|$

Proposisi 31. Jika $(X, \|\bullet\|)$ ruang bernorma maka fungsi d didefisikan sebagai:

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

adalah *jarak* pada X yang memenuhi kondisi dibawah ini:
i. $d(x + z, y + z) = d(x,y)$
ii $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\ d(x,y)$

Bukti:

Lebih dulu akan dibuktikan bahwa d adalah metrik.

1. $d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = \|x - y\|$
$= \|x - y + z - z\|$
$\leq \|x - z\| + \|z - y\|$
$= d(x,z) + d(z,y)$

Jadi terbukti bahwa d adalah metrik. Selanjutnya akan dibuktikan kedua kondisi di atas.

i. $d(x+z, y+z) = \|(x + z) - (y + z)\|$

$= \|x - y\|$
$= d(x,y)$

ii. $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\|$
$= \|\lambda\,(x - y)\|$
$= |\lambda|\ \|(x - y)\| = |\lambda|\ d\,(x,y)$

Dari preposisi ini dapat disimpulkan bahwa setiap ruang bernorma adalah ruang metrik.

11. Teorema F. Riesz. Ruang vektor bernorma *X* adalah kompak lokal jika dan hanya jika *X* berdimensi berhingga.

Bukti:

($\Rightarrow$) Dimisalkan *X* ruang vektor bernorma yang kompak lokal. Dibentuk bola tertutup $B_\varepsilon(\bar{0})$ dengan pusat $\bar{0}$ dan radius $\varepsilon > 0$ di dalam *X* maka $B_\varepsilon(\bar{0})$ kompak. Jadi ada $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in B_\varepsilon(\bar{0})$ sedemikian hingga $B_\varepsilon(\bar{0}) \subset \coprod_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_1)$. Perhatikan *Y* sub ruang berdimensi yang dibangkitkan oleh titik-titik x_i ($1 \leq i \leq n$). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $X=Y$.

Diandaikan $Y \neq X$. Maka ada $x_n \in X$ dan $x_n \notin Y$, karena *Y* berdimensi berhingga maka *Y* lengkap dan tertutup. Kemudian didefinisikan

$$d(x_0, Y) = inf_{y \in F}\|x_0 - y\| = \alpha > 0$$

karena $\alpha < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ maka $\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ bukan batas bawah, artinya ada $y_0 \in Y$ sedemikian hingga $\alpha - d(x_0, Y) \leq \|x_0 - y_0\| \leq d(x_0, Y) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{2}$

Misalkan $z_0 = \frac{\varepsilon(x_0 - y_0)}{\|x_0 - y_0\|}$ tentu $z_0 \in B_\varepsilon(\bar{0})$ sehingga $\|z_0\| = \varepsilon$ dan $\|z_0 - x_1\| = \left\|\varepsilon\frac{(x_0 - y_0)}{\|x_0 - y_0\|} - x_1\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dimana $(z_0 - x_1) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$.

Bentuk $y = x_0 - \frac{\|x_0 - y_0\|}{\varepsilon}(z_0 - x_1) = y_0 + \frac{\|x_0 - y_0\|}{\varepsilon} x_1$

Karena $y_0, x_1 \in Y$ maka $y \in Y$, sehingga didapat

$\alpha \leq \|x_0 - y\| = \|x_0 - y_0\| \frac{\|z_0 - x_1\|}{\varepsilon} \leq \frac{3\alpha}{2}\frac{1}{2} = \frac{3\alpha}{4}$

Terjadi kontradiksi, sehingga pastilah $x_0 \in Y$ dan $X = Y$.

($\Leftarrow$) Jika *X* berdimensi berhingga maka *X* isomorfis ke ruang $\mathbb{R}^n$. Karena sekitar $N_\varepsilon(x_i)$ dalam $\mathbb{R}^n$ adalah kompak maka $\mathbb{R}^n$ kompak lokal dan *X* isomorfis $\mathbb{R}^n$ berarti *X* juga kompak lokal.

PEMBAHASAN

Ruang metrik *X* dikatakan mempunyai sifat bola tertutupnya kompak jika setiap bola tertutup dari ruang metrik ini merupakan himpunan yang kompak. Selanjutnya ruang metrik *X* yang bersifat seperti ini oleh Aubin(1977) diberi nama *Metric Spaces With Compact Closed Balls (CCB) atau ruang metrik dengan sifat bola tertutupnya kompak* dan selanjutnya akan disebut sebagai *X bersifat CCB (Compact Closed Balls) atau ruang bersifat CCB.* Tetapi ada juga yang menamakan ruang metrik ini dengan *Metric Spaces With Nice Closed Balls atau ruang metrik dengan sifat bola tertutup rapi* (Beer G, 1987). Sedangkan salah satu contoh ruang bersifat CCB ini adalah ruang Euclides berdimensi n *($\mathbb{R}^n$)* dan ruang diskrit. Dimisalkan *B* bola tertutup dalam $\mathbb{R}^n$ maka *B* akan tertutup dan terbatas dalam sel-n yang kompak. Jelas *B* kompak. Begitu juga dengan ruang diskrit, dapat diperlihatkan secara sederhana bahwa ruang diskrit merupakan ruang bersifat CCB. Dalam tulisan diatas telah disebutkan bahwa himpunan yang kompak dalam suatu ruang metrik sebarang akan tertutup dan terbatas, sebaliknya belum tentu berlaku. Disinilah menariknya ruang metrik yang bersifat CCB ini, karena di dalam ruang metrik ini dapat dibuktikan bahwa setiap sub himpunan yang tertutup dan terbatas dari *X* merupakan himpunan kompak.

Pembahasan selanjutnya akan membuktikan sifat diatas serta membicarakan sifat-sifat apa saja yang bisa diturunkan dari ruang metrik tersebut dan akan dinyatakan dalam bentuk preposisi berikut ini.

Preposisi 1. Ruang metrik *X* bersifat CCB jika dan hanya jika setiap sub himpunan yang tertutup dan terbatas dari *X* adalah kompak.

Bukti:

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika *X* bersifat CCB maka sub himpunan yang tertutup dan terbatas dari *X* merupakan himpunan kompak. Diambil himpunan *F* yang tertutup dan terbatas di dalam *X*, sedemikian hingga $F \subseteq B$ dengan *B* bola tertutup dalam *X*. Karena *X* bersifat CCB maka pastilah *B* kompak, jika *B* kompak dan $F \subseteq B$ maka (menurut teorema 8.10) dapat disimpulkan bahwa *F* kompak.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika sub himpunan yang tertutup dan terbatas di dalam *X* merupakan himpunan yang kompak, maka *X* bersifat CCB. Diambil *B* bola tertutup dalam *X*, maka *B* pastilah terbatas. Karena *B* merupakan sub himpunan tertutup dari *X* yang kompak maka *B* kompak. Dan sesuai definisi jelas bahwa *X* bersifat CCB.

Preposisi 2. Pada ruang metrik sebarang maka setiap himpunan yang kompak akan bersifat CCB.

Bukti: Diambil bola tertutup *B* di dalam *X*. Maka *B* merupakan himpunan tertutup didalam *X*. Karena *X* kompak dan $B \subset X$ maka menurut teorema 8.10 maka *B* pastilah kompak. Kesimpulannya *X* bersifat CCB.

Preposisi 3. Setiap sub himpunan tertutup dari ruang CCB adalah ruang CCB. Sedangkan sub himpunan terbuka dari ruang CCB pada umumnya bukan ruang CCB.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa setiap sub himpunan tertutup dari ruang CCB adalah ruang CCB. Misalkan diambil sebarang himpunan tertutup *F* dari *X* yang bersifat CCB. Jika *F* berupa bola tertutup, dan *F* didalam ruang CCB jelas bahwa *F* kompak. Sesuai preposisi 2 maka *F* bersifat CCB. Jika *F* bukan bola tertutup dengan kata lain *F* merupakan himpunan tertutup biasa, maka diambil sebarang bola tertutup *B* didalam *F*. Karena $F \subset X$ maka $B \subset X$. Karena *X* bersifat CCB maka pastilah *B* kompak.sehingga didapat *B* bola tertutup yang kompak di dalam *F*, dengan kata lain *F* bersifat CCB.

Sedangkan untuk membuktikan bahwa sub himpunan terbuka dari ruang CCB pada umumnya bukan ruang CCB kita gunakan contoh.

Contoh:

Diberikan ($\mathbb{R}$, *d*) sebagai ruang CCB. Diambil $E = (0,2)$ dan $E \subset \mathbb{R}$. Pilih *B* bola tertutup dalam *E* dengan pusat $\frac{1}{2}$ dan $r = \frac{1}{2}$, maka:

$B = B_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) = \{x \in E \mid d(\frac{1}{2}, x) \leq \frac{1}{2}\} = (0,1]$

Bola diatas akan tertutup relatif terhadap *E* tapi tidak tertutup dalam $\mathbb{R}$ sehingga menurut teorema 23 *B* tidak kompak dalam $\mathbb{R}$. Karena $B \subset E$ dan $E \subset \mathbb{R}$ maka *B* tidak kompak dalam *E* sebab suatu himpunan kompak dalam *E* jika dan hanya jika himpunan tersebut kompak dalam $\mathbb{R}$.

Proposisi 4. Dimisalkan (*X*, *d*) ruang metrik. Jika *X* ruang yang bersifat CCB maka:

(i) *X* lengkap

(ii) *X* kompak lokal, dan

(iii) *X* separabel

Bukti:

(i) Diambil sebarang barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik X yang bersifat CCB. Karena $\langle x_n \rangle$ barisan terbatas di dalam X, maka daerah jangkau $E = \{x_n\}$ merupakan himpunan terbatas didalam X. Dengan demikian terdapat bola tertutup B di dalam X, sehingga $E \subset B$. Karena X bersifat CCB dan $B \subset X$ maka B kompak. Menurut teorema 25 $\langle x_n \rangle$ barisan cauchy di dalam himpunan B yang kompak maka $\langle x_n \rangle$ konvergen ke $x \in B$ terbukti bahwa X lengkap.

(ii) Diambil sebarang sekitar $N_r(p)$ dengan pusat $p \in X$ dan jari-jari $r > 0$. Maka $Nr(p) \subset X$ dimana $Nr(p) = \{x \in X \mid d(p,x) < r\}$. Penutup dari $Nr(p)$ merupakan bola tertutup B sehingga $B = \{ x \in X \mid d(p,x) \leq r \} = closure\ (Nr(p)) = \overline{Nr(p)}$

Dan $B \subseteq X$, karena X bersifat *CCB*, maka $B = \overline{Nr(p)}$ kompak. Terbukti X kompak lokal.

(iii) Diambil sebarang bola tertutup B di dalam X. Karena X bersifat CCB maka B kompak. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dimisalkan D_n himpunan berhingga di dalam B. Karena B kompak maka setiap $x \in B$ terdapat $y \in D_n$ sedemikian hingga $d(x,y) < \frac{1}{n}$

pilih $y = y_1 \in D_n \rightarrow d(x,y_1) < 1$

pilih $y = y_2 \in D_n \rightarrow d(x,y_2) < \frac{1}{2}$

: :

: :

pilih $y = y_n \in D_n \rightarrow d(x,y_n) < \frac{1}{n}$

maka $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in D_n$. Misal $D = \coprod_{n=1}^{\infty} D_n = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$. Maka terdapat D yang terbilang. Untuk $n \rightarrow \infty$ maka $y_n \rightarrow x \in X$ dengan kata lain D dense dalam X. Jadi terbukti X separabel.

Proposisi 5. Diberikan (X,d) ruang metrik yang bersifat CCB, maka:

(i) Setiap himpunan tertutup A dari X dan $\forall x \in X$, $\exists a \in A$ sehingga $d(x,A) = d(x,a)$.

(ii) Jika A sub himpunan yang kompak pada X dan B himpunan tertutup dari X maka ada $a \in A$ dan $b \in B$ sehingga $d(A,B) = d(a,b)$.

Bukti:

(i) Diambil $A \subset X$ dan A tertutup. Karena X bersifat CCB maka ada bola tertutup B yang kompak sedemikian hingga $A \subset B$. Karena A tertutup dan $A \subset B$ dengan B kompak maka A juga kompak.

Diambil $x \in X$ maka $d(x,A) = inf\ \{d(x,a)\ ; a \in A\}$. Artinya ada $y_k \in A$ sedemikian hingga $\lim_{k\to\infty} d(x, y_k) = d(x, A)$. Karena A kompak maka ada $a \in A$ sehingga $\lim_{k\to\infty} y_k = a$ dan fungsi $d(x,A)$ kontinu berakibat $d(x,a) = \lim_{k\to\infty} d(x, y_k) = d(x, A)$

Terbukti ada $a \in A$ sehingga $d(x,A) = d(x,a)$.

(ii) Diambil $a \in A$ maka $d(a,B) = inf_{b\in B}\ d(a,b)$, menurut (i) ada $b \in B$ sehingga $d(a,B) = d(a,b)$.Diambil *infinum* meliputi semua $a \in A$ maka $inf_{b\in B}\ d(a,B) = d\ (A,B)$, artinya ada $y_k \in A$ sedemikian hingga $lim_{k\to\infty}\ d(y_k, B) = d(A,B)$. Karena A kompak maka ada sub barisan, misalkan diambil $\langle y_k \rangle$ sedemikian hingga $y_k \rightarrow a \in A$. Sehingga $\lim_{k\to\infty} d(y_k, B) = d(a,B) = d(A,B)$. Jadi terbukti $d(a,b) = d(A,B)$

Proposisi 6. Ruang bernorma adalah ruang bersifat CCB jika dan hanya berdimensi berhingga

Bukti:

($\Rightarrow$) Dimisalkan *X* ruang bernorma yang bersifat CCB, akan dibuktikan *X* berdimensi berhingga. Karena *X* ruang bernorma yang bersifat CCB maka *X* ruang metrik yang bersifat CCB (preposisi 2) sehingga *X* kompak lokal (preposisi 4). Dan menurut teorema F. Riesz maka *X* berdimensi berhingga.

($\Leftarrow$) Misal *X* ruang bernorma yang berdimensi berhingga maka menurut teorema F. Riesz maka *X* kompak lokal. Ambil sembarang bola tertutup *B* di dalam *X* maka *B* kompak. Jadi terbukti *X* ruang bersifat CCB.

PENUTUP

Kesimpulan

Pada ruang metrik *(X,d)* yang bersifat CCB berlaku, antara lain:

1. Setiap sub himpunan yang tertutup dan terbatas di dalam *X* adalah kompak.
2. Himpunan yang kompak bersifat CCB.
3. bersifat CCB. Sedangkan untuk sub himpunan yang terbuka pada umumnya bukan ruang bersifat CCB.

Saran

Masih ada sifat-sifat lain yang mungkin bisa diturunkan dan bisa dipelajari/ dibuktikan lebih lanjut mengenai ruang metrik yang bersifat CCB ini, misalnya di ruang $\mathbb{R}^n$, apakah masih berlaku sifat CCB ini jika metrik yang digunakan adalah metrik Euclides d (metrik yang didefinisikan dari pengertian norma) dan bagaimana juga apabila digunakan metrik lain yang ekivalen yaitu $\frac{d}{(1+d)}$, masih berlaku atau tidak, atau jika (*X*, *d*) dipandang sebagai ruang metrik yang kompak lokal dan separable kira-kira sifat apa yang bisa diturunkan dari ruang metrik ini.

DAFTAR PUSTAKA

Aubin, J.P. 1977. **Applied Abstract Analysis.** New York: Wiley.

Beer, G. 1987. **Metric Spaces with Nice Closed Balls and Distance Function for Closed Set.** Bull. Australian Math, Soc.

Inna Maturida, D., YD Sumanto. 2009. **Himpunan-himpunan Kompak dalam Ruang Hausdorff.** Thesis Univ. Muhammadiyah Malang.

Kurniasih, N. 2011. **Sifat-sifat Topologi Ruang Linear.** ejurnal, umpwr.

Kusrini, Susiswo. 2005. **Pengantar Topologi.** Jakarta: Universitas Terbuka.

Kustiawan, Cece. 2012. **Himpunan Kompak pada Ruang Metrik.** *Jurnal Infinity*.

Rohmawati, Laily. 2009. **Himpunan Kompak dalam ruang Topologi.** Thesis Univ. Muhammadiyah Malang.

Royden, H .L. 1989. **Real Analysis.** New York: Macmillan Publishing Company.

Soemantri, R. 1993. **Analisis Real I.** Jakarta: Penerbit Karunika U.T.

Sukmaringga, Deki. 2011. **Sifat Ruang Metrik Topologis.** Skripsi Undip Semarang.